Correction de certains exercices proba 2e série

1) Pour étudier l'indépendance de 2 événements, on doit vérifier que $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$.
Il faut donc calculer séparément $p(A)$, $p(B)$ et $p(A\cap B)$
D'après l'ex. 1 de la 1e série, on peut facilement obtenir que $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{1}{2}$ et $p(C) = \frac{3}{8}$

- L'év. $A\cap B$ est l'év "Le 1er lancé est face <u>et</u> le 2e est face"
  Donc $A\cap B = \{FFP, FFF\}$ et $p(A\cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
  Or $p(A\cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = p(A)\cdot p(B)$ donc <u>A et B indépendants</u>
- L'év. $A\cap C$ est l'év "le 1er lancé est face <u>et</u> ~~le~~ 2 lancés consécutifs donnent face".
  Donc $A\cap C = \{FFP, FFF\}$ et $p(A\cap C) = \frac{1}{4}$

  Mais ici $\left.\begin{array}{l} p(A\cap C) = \frac{1}{4} \\ p(A)\cdot p(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8} = \frac{3}{16}\end{array}\right\} \Rightarrow p(A\cap C) \neq p(A)\cdot p(C)$ $\Rightarrow$ <u>A et C dépendants</u>
- $B\cap C$ = "Le 2e lancé est face <u>et</u> 2 lancés consée. donnent face"
  $= \{FFF, FFP, PFF\}$
  donc $\left.\begin{array}{l} p(B\cap C) = \frac{3}{8} \\ p(B)\cdot p(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8} = \frac{3}{16}\end{array}\right\} \Rightarrow p(B\cap C) \neq p(B)\cdot p(C)$ $\Rightarrow$ <u>B et C dépendants</u>

---

2) a) Exprimons l'év. comme suit.
"La pièce tirée de A est défectueuse <u>et</u> la pièce tirée de B est déf"
Il est donc composé de 2 év. dont on peut calculer facilement la probabilité. Désignons ces év. resp. par A et B (attention!)
Notre év. de départ noté X est donc l'év. $A\cap B$
Donc $p(X) = p(A\cap B)$. Or les év. A et B sont indépendants (car la prob. de l'un n'est pas influencée par la réalisation de l'autre) donc $p(X) = p(A)\cdot p(B) = \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{8}$

b) $\bar{A}$ est l'év. "La pièce tirée de A est non défectueuse"
$\bar{B}$ " " " .. .. B .. .. ..

On peut écrire l'év. Y sous la forme :
" La pièce de A est non déf **et** celle de B est déf **ou** la pièce de A est non déf. **et** celle de B est déf "

On a donc $Y = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$. Tous ces év. sont indépendants et disjoints (leur intersection est vide)

donc $p(Y) = p(\bar{A}) \cdot p(B) + p(A) \cdot p(\bar{B})$
$= \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{9} = \frac{19}{40}$

---

4) Désignons par A l'év " A résout le problème " $p(A) = \frac{1}{6} \Rightarrow p(\bar{A}) = \frac{5}{6}$
B " B .. .. .. " $p(B) = \frac{1}{4} \Rightarrow p(\bar{B}) = \frac{3}{4}$
C " C .. .. .. " $p(C) = \frac{1}{3} \Rightarrow p(\bar{C}) = \frac{2}{3}$

Donc $\bar{A}$ ($\bar{B}$, $\bar{C}$) désigne l'év. " A ne résout pas le problème "

a) En utilisant des **et**, et des **ou** que l'on remplace par $\cap$ et $\cup$ resp., on peut écrire que l'év. X est

$X = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$

Les différents év. sont indépendants et disjoints (intersection vide)

donc $p(X) = p(A) \cdot p(\bar{B}) \cdot p(\bar{C}) + p(\bar{A}) \cdot p(B) \cdot p(\bar{C}) + p(\bar{A}) \cdot p(\bar{B}) \cdot p(C)$
$= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{31}{72}$

b) $Y = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ donc $p(Y) = p(\bar{A}) \cdot p(\bar{B}) \cdot p(\bar{C}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{12}$

c) Attention les mots sachant que apparaissent dans l'énoncé. Il s'agit alors d'une probabilité conditionnelle.
On sait que l'un d'eux exactement a résolu le problème qui est. l'év. X et on cherche la prob. de $A | X$ sachant que X est réalisé

On $p(A | X) = \frac{p(A \cap X)}{p(X)}$ et $A \cap X = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

Donc $p(A | X) = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{31}{72}} = \frac{6}{31}$

5) Soit H l'év "l'homme vit encore 10 ans"
et F "la femme " " "
Exprimez alors les év. à l'aide des év.
$H, \bar{H}, F, \bar{F}$, $\cap$ et/ou $\cup$.

Solutions : $p(A) = \frac{1}{12}$, $p(B) = \frac{1}{2}$, $p(C) = \frac{1}{2}$, $p(D) = \frac{1}{4}$

---

3) Désignons par V_i "l'équipe gagne au i^e match" $i = 1, 2, 3$
P_i " perd " " "
N_i " fait nul " " "

a) Soit X l'év "l'équipe gagne au moins une fois (1 fois ou 2) et ne perd pas"

On a $X = (V_1 \cap N_2 \cap N_3) \cup (N_1 \cap V_2 \cap N_3) \cup (N_1 \cap N_2 \cap V_3)$
$\cup (V_1 \cap V_2 \cap N_3) \cup (V_1 \cap N_2 \cap V_3) \cup (N_1 \cap V_2 \cap V_3)$
$\cup (V_1 \cap V_2 \cap V_3)$ les diff. év. étant indépendants et disjoints

donc $p(X) = (0,6)(0,1)(0,1) + (0,1).(0,6).(0,1) + (0,1).(0,1).0,6$
$+ (0,6).(0,6).(0,1) + (0,6)(0,1).(0,6) + (0,1).(0,6).(0,6)$
$+ (0,6).(0,6).(0,6)$
$= 3.(0,6)(0,1)^2 + 3.(0,6)^2.(0,1) + (0,6)^3$
$= 0,342$

b) Il y a $6 = P_3$ événements qui correspondent à Y qui ont tous la même probabilité $((V_1 \cap N_2 \cap P_3) \cup \ldots)$

$p(Y) = 6.(0,6).(0,3).(0,1) = 0,108$

6) Les élèves sont choisis l'un après l'autre donc lorsque le 1e élève est tiré, il y a au total 1 élève de moins lorsqu'on tire le 2e soit 14 et encore 1 de moins au total lorsqu'on tire le 3e soit 13.

Les prob. des év. à chaque tirage sont donc celles d'événements dépendants et donc sont des prob. conditionnelles.
La prob. au 2e tirage est influencée par la réalisation de l'év. au 1e tirage et ainsi de suite

Désignons par F_i : "le i^e élève est une fille" $\quad i = 1, 2, 3$
G_i : " .. .. un garçon"

a) L'év. A : "Les 2 1e sont des garçons et le 3e une fille"
s'écrit $A = G_1 \cap G_2 \cap F_3$

$$\text{et } p(A) = p(G_1) \cdot p(G_2 \mid G_1) \cdot p(F_3 \mid G_1 \cap G_2)$$
$$= \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{15}{91}$$

b) De la même façon : $B = G_1 \cap F_2 \cap G_3$

$$\text{et } p(B) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13} = p(A).$$

c) ⚠ <u>Si</u> (sachant que) donc la prob. est conditionnée

Soit X : "le 1e est une fille"
Y : "le 1e et le 3e sont de même sexe"

$$p(X \mid Y) = \frac{p(X \cap Y)}{p(Y)} \quad . \text{ Or } X \cap Y = B \text{ et } Y = B \cup (F_1 \cap G_2 \cap F_3)$$

$$\text{donc } p(X \cap Y) = \frac{15}{91} \text{ et } p(Y) = \frac{15}{91} + \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{65}{273}$$

$$\text{et } p(X \mid Y) = \frac{\frac{15}{91}}{\frac{65}{273}} = \frac{9}{13}$$

Utilisation d'arbres de probabilités ex. 7) → 11)

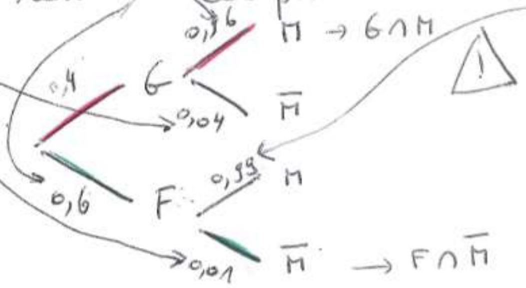
7) Désignons par G l'év : "l'élève est un garçon"
F .. : .. .. une fille
M : "l'élève mesure moins de 1,6 m"
$\overline{M}$ .. .. plus de 1,6 m"

Les prob. données sont : $p(F) = 0,6$ donc $p(G) = 1-0,6 = 0,4$

⚠ Les 2 autres proba. données sont des prob. conditionnelles
0,04 désigne la proba. de mesurer plus de 1,6 m sachant que l'élève est un garçon donc $0,04 = p(\overline{M} \mid G)$
et $0,96 = p(M \mid G)$.

0,06 désigne la prob. de mesurer plus de 1,6 m sachant que l'élève est une fille donc $0,0 = p(\overline{M} \mid F) \Rightarrow 0,9 = p(M \mid F)$

On résume ces proba. à l'aide d'un arbre.



⚠ $p(M) \neq 0,96$ ou $0,94$.

a) Soit X l'év. "l'élève est une fille qui mesure plus de 1,6 m"
et

$p(X) = p(F \cap \overline{M}) = p(F) \cdot p(\overline{M} \mid F) = 0,6 \cdot 0,01 = 0,006 = 0,6\%$.

b) Soit Y l'év. "l'élève est un garçon qui mesure moins de 1,6 m"
et

$p(Y) = p(G \cap M) = p(G) \cdot p(M \mid G) = 0,4 \cdot 0,96 = 0,384 = 38,4\%$.

c) ⚠ Si (sachant que). On a tiré un élève de plus de 1,6 m.
et on cherche la prob. que celui-ci soit une fille.
L'év. est donc $F \mid \overline{M}$ et $p(F \mid \overline{M}) = \dfrac{p(F \cap \overline{M})}{p(\overline{M})}$

L'év. $\overline{M}$ est l'év $(G \cap \overline{M}) \cup (F \cap \overline{M})$ donc $p(\overline{M}) = 0,4 \cdot 0,04 + 0,6 \cdot 0,01 = 0,022$

donc $p(F \mid \overline{M}) = \dfrac{0,006}{0,022} = \dfrac{3}{11}$

8) Utilisez un arbre pour les exos 8) → 11)

8) Solution : a) 0,012 b) 0,096 c) 0,48 d) ≃ 0,298

9) a) $\frac{233}{360}$; $\frac{127}{360}$ b) $\frac{80}{233}$

10) a) 0,513 b) 0,59

11) a) 0,12 b) 0,14 c) ≃ 0,46 d) ≃ 0,76

Utilisation de tableaux pour ex. 12) → 14)

12) a) On complète facilement le tableau

	Cl	Ca	
E	75	45	120
R	25	35	60
Total	100	80	180

On définit les événements :

E : "Le gâteau est un éclair"

R : " .. .. .. une religieuse"

Cl : " .. .. .. au chocolat

Ca : .. .. café "

b) 1. $p(E \cap Cl) = \frac{75}{180} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

2. $p(R) = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$

3. $p(Ca) = \frac{80}{180} = \frac{4}{9}$

c) ⚠ Sachant que. La prob. est conditionnelle et l'év. est $Cl|R$.

$$p(Cl|R) = \frac{p(R \cap Cl)}{p(R)} = \frac{\frac{25}{180}}{\frac{60}{180}} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$$

ou On sait qu'il y a 60 religieuses et parmi celles-ci il y en a 25 au chocolat donc $p(Cl|R) = \frac{25}{60}$

---

d) L'év. X peut s'écrire : "Il prend 2 gâteaux au choco ou 2 gâteaux au café". S'il prend les gâteaux simultanément

$\# \Omega = C_{180}^2$

$\# X = C_{100}^2 + C_{80}^2$

$$p(X) = \frac{C_{80}^2 + C_{100}^2}{C_{180}^2} \simeq 0,503$$